BAB II

TEORI PENUNJANG

II.1 Multi Objective

Dalam menyelesaikan masalah-masalah nyata dewasa ini, pada umumnya digunakan teknik pengoptimalan dengan fungsi sasaran tunggal atau Single Objective (SO). Padahal bila kita teliti lebih lanjut, tujuan-tujuan yang sering kita jumpai tidaklah selalu tunggal atau Multi Objective (MO), bahkan kadang-kadang tujuan yang satu bertentangan dengan tujuan yang lainnya.

Secara umum pengoptimalan masalah Multi Objective dapat ditulis sebagai berikut :

Tentukan $\underline{X} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ sedemikian sehingga memaksimalkan/meminimalkan $f_i(X)$, $i=1,2,\ldots,m$ dengan $\underline{X} \geq 0$.

Untuk menyelesaikan Multi Objective tersebut, terdapat tiga metode, yaitu : Pembobotan, Ranking atau Prioritas dan Solusi yang efisien.

Ada beberapa teknik penyelesaian yang menyangkut ke tiga metode di atas, salah satunya adalah GOAL PROGRAMMING. Dalam tulisan ini hanya akan dibahas Linier Goal Programming karena memiliki kelebihan antara lain :

1. Pengembangan model relatif mudah dan langsung.
2. Memerlukan sedikit perubahan untuk disesuaikan ke bentuk perubahan lain.
3. Metode penyelesaiannya cukup mudah, hanya menyempurnakan Metode Simplex dua fase.

4. Metode sudah lama berkembang.
5. Model dan asumsinya tampaknya sesuai dengan masalah dunia nyata tertentu.

II.2 Linier Goal Programming

Linier Goal Programming (LGP) dapat dipandang sebagai perluasan dari Linier Programming (LP). Dalam LGP banyaknya fungsi sasaran satu atau lebih, sedangkan LP hanya menyangkut satu fungsi sasaran saja. Selain itu, dalam rumusan LGP diperkenalkan pula variabel-variabel deviasi. Variabel-variabel ini menyatakan besarnya penyimpangan antara nilai penyelesaian terhadap nilai sasaran yang ditetapkan dalam fungsi sasaran. Variabel deviasi inilah yang harus diminimalkan.

Langkah awal untuk membawa masalah Multi Objective ke LGP adalah menetapkan terlebih dahulu 'Nilai Sasaran' yang pengertiannya adalah sebagai berikut :

Misalkan suatu fungsi sasaran ke-l, $f_l(X)$ akan dimaksimalkan. Kita menentukan berapa nilai terkecil yang harus dicapai dalam melakukan pemaksimalan tersebut. Misal nilai terkecil tersebut adalah b_l. Nilai b_l tersebut lebih dikenal dengan batas bawah yang diinginkan dari masalah pemaksimalan $f_l(X)$.

Disini b_l disebut Nilai Sasaran yang diinginkan.

Begitu juga dengan masalah peminimalan. Kita menentukan nilai tertinggi yang harus dicapai. Nilai b_l ini lebih dikenal dengan batas atas yang diinginkan dari $f_l(X)$.

Untuk suatu $\underline{X}^*$ yang memberikan solusi fisibel akan diperoleh

$f(X^*)$. Maka selisih antara $f(X^*)$ dengan nilai sasaran $\underline{b}$ disebut deviasi. Apabila nilai $f(X^*)$ berada di bawah $\underline{b}$, dikatakan penyimpangan negatif. Begitu juga sebaliknya, bila nilai $f(X^*)$ berada di atas $\underline{b}$, dikatakan terjadi penyimpangan positif.

Langkah-langkah yang harus dilakukan dalam merumuskan masalah pengoptimalan biasa ke bentuk Goal Programming :

1. Menetapkan nilai sasaran untuk setiap fungsi sasaran.
2. Membentuk rumusan sasaran.
3. Membentuk vektor pencapaian.

Tabel berikut memuat pembentukan rumusan sasaran dan variabel deviasi yang membentuk vektor pencapaian.

Type sasaran	Rumusan sasaran	Variabel deviasi yang diminimalkan
$f_i(X) \le b_i$	$f_i(X)+\eta_i-\rho_i = b_i$	ρ_i
$f_i(X) \ge b_i$	$f_i(X)+\eta_i-\rho_i = b_i$	η_i
$f_i(X) = b_i$	$f_i(X)+\eta_i-\rho_i = b_i$	$\eta_i + \rho_i$

Tabel 2.1

Dari langkah-langkah di atas, dapat dibentuk model umum dari Goal Programming sebagai berikut :

Tentukan : $\underline{X} = (x_1, x_2, \dots , x_n)$, sehingga :

meminimalkan $a = \left\{ g_1(\eta , \rho), \dots , g_K(\eta , \rho) \right\}$

dan memenuhi G_i : $f_i(\underline{X}) + \eta_i - \rho_i = b_i$

untuk $i = 1, 2, \dots, m.$

$\underline{X} , \underline{\eta} , \underline{\rho} \ge 0$

dimana :

x_j = variabel-variabel keputusan ke-j.

a = vektor hasil (vektor pencapaian).

$g_k(\underline{\eta},\underline{\rho})$ = fungsi linier dari tujuan atau variabel deviasi yang akan diminimalkan pada prioritas ke-k.

ρ_i = variabel deviasi positip ke-i.

η_i = variabel deviasi negatip ke-i.

G_i = sasaran ke-i pada masalah awal yang menjadi kendala ke-i pada LGP.

$f_i(\underline{X})$ = ruas kiri dari sasaran ke-i (fungsi tujuan ke-i).

b_i = nilai sasaran / tetapan ruas kanan dari sasaran ke-i.

dengan i = 1, 2, ... , m.

j = 1, 2, ... , n.

k = 1, 2, ... , K.

Contoh :

Seseorang ingin mendirikan pabrik yang menghasilkan tiga jenis barang, yaitu A, B, C.

Setelah diadakan penelitian, maka diberikan tabel yang memuat data yang berkaitan dengan pendirian pabrik tersebut.

	Unit kontribusi produksi		
	A	B	C
Keuntungan (Rp)	12	9	15
Investasi modal (Rp)	5	7	8

Pendiri pabrik mempunyai tujuan sebagai berikut :

a. Mendapatkan laba sebanyak mungkin.

b. Jumlah investasi seminimal mungkin.

Berapakah jumlah untuk masing-masing jenis barang harus diproduksi agar memenuhi tujuan tersebut ?.

Penyelesaian :

Misalkan x_1, x_2 dan x_3 menunjukkan jumlah barang A, B dan C. Dalam bentuk pengoptimalan Multi Objective, masalah di atas dapat ditulis sebagai berikut :

Tentukan $\underline{X} = \{ x_1, x_2, x_3 \}$ sehingga

memaksimalkan $f_1(\underline{X}) = 12\ x_1 + 9\ x_2 + 15\ x_3$

meminimalkan $f_2(\underline{X}) = 5\ x_1 + 7\ x_2 + 8\ x_3$

dan memenuhi : $\underline{X} \geq 0$

Untuk merumuskannya ke masalah Goal Programming, si pemilik pabrik terlebih dahulu harus menentukan nilai sasaran untuk masing-masing tujuan.

Misalkan pemilik pabrik menetapkan besaran-besaran sebagai berikut :

- Minimal laba yang ingin dicapai Rp 120,-.
- Jumlah investasi diusahakan tidak melebihi Rp 60,-.

Karena yang berkaitan dengan $f_1(\underline{X})$ adalah menyangkut masalah pemaksimalan, maka η_1 yang akan diminimalkan.

Sedangkan rumusan sasarannya (yang merupakan kendala pada Goal Programming) menjadi :

G_1 : $12\ x_1 + 9\ x_2 + 15\ x_3 + \eta_1 - \rho_1 = 120$

Sedangkan untuk $f_2(\underline{X})$ menyangkut masalah peminimalan, maka ρ_2 yang akan diminimalkan.

Dan rumusan sasarannya menjadi :

G_2 : $5\ x_1 + 7\ x_2 + 8\ x_3 + \eta_2 - \rho_2 = 60$

Secara lengkap, model Goal Programming dari masalah di atas dapat ditulis menjadi :

Tentukan $\underline{X}$: $\{ x_1, x_2, x_3 \}$ sehingga :

meminimalkan : $a = \eta_1 + \rho_2$

dan memenuhi :

G_1 : $12\ x_1 + 9\ x_2 + 15\ x_3 + \eta_1 - \rho_1 = 120$

G_2 : $5\ x_1 + 7\ x_2 + 8\ x_3 + \eta_2 - \rho_2 = 60$

$\underline{X}$, $\underline{\eta}$, $\underline{\rho} \geq 0$

dengan $\eta = \{ \eta_1, \eta_2 \}$

$\rho = \{ \rho_1, \rho_2 \}$

Beberapa pengertian dan istilah :

1. Variabel Keputusan.

   Variabel keputusan adalah suatu variabel yang dapat dikontrol dan secara langsung mempengaruhi nilai penyelesaian masalah.

   Dinotasikan dengan x_j , $j = 1, 2, \ldots ,n$.

2. Nilai Sasaran.

   Nilai sasaran adalah suatu besaran yang ditetapkan untuk dicapai dari fungsi sasaran.

Dinotasikan dengan b_i , $i = 1, 2, \ldots ,m$.

3. Variabel Deviasi.

Variabel deviasi adalah suatu variabel yang menunjukkan penyimpangan yang terjadi antara nilai fungsi sasaran dengan nilai sasaran yang telah ditetapkan.

Terdapat dua macam variabel deviasi :

- Variabel deviasi positif : untuk menyatakan penyimpangan yang berada di atas sasaran yang hendak dicapai, yaitu bilamana nilai fungsi sasaran melampaui nilai sasaran.

  Dinotasikan dengan ρ_i , $i = 1, 2, \ldots ,m$.
- Variabel deviasi negatif : untuk menyatakan penyimpangan yang berada di bawah sasaran yang hendak dicapai, yaitu bilamana nilai fungsi sasaran kurang dari nilai sasaran.

  Dinotasikan dengan η_i , $i = 1, 2, \ldots ,m$.

4. Prioritas.

Prioritas adalah suatu sistem urutan yang memungkinkan sasaran-sasaran disusun secara ordinal dalam model LGP.

Dinotasikan dengan P_k , $k = 1, 2, \ldots ,K$.

5. Pembobotan.

Pembobotan adalah besaran numerik yang diberikan pada variabel-variabel deviasi yang diminimalkan (pada fungsi sasaran LGP) apabila tingkat kepentingan untuk mencapai nilai sasaran dari setiap sasaran dalam satu prioritas.

6. Solusi Fisibel.

Solusi fisibel adalah solusi yang memenuhi persamaan dan pertidaksamaan dalam sistem.

Dalam LGP solusi fisibel harus memenuhi persamaan :

$$f_i(\underline{X}) + \eta_i - \rho_i = b_i$$

dan $\underline{X}$, $\underline{\eta}$, $\underline{\rho}$, $\underline{b}$ ≥ 0

$i = 1, 2, \ldots ,m.$

II.3 Metode Penyelesaian LGP

LGP dapat diselesaikan dengan beberapa metode, yaitu:

- Metode pendekatan grafik
- Metode Sequential LGP
- Metode Multiphase Simplex (MS)

Dalam penulisan ini hanya akan dibahas mengenai penyelesaian dengan menggunakan metode multiphase simplex yang merupakan modifikasi dari metode simplex dalam LP.

Algorithma Multiphase Simplex

Sebelumnya perlu diketahui tabel awal MS.

	P_K	$w_{K,1} \dots w_{K,n}$ $w_{K,n+1} \dots w_{K,n+m}$	
	$\vdots$	$\vdots$	
	P_1	$w_{1,1} \dots w_{1,n}$ $w_{1,n+1} \dots w_{1,n+m}$	
$P_K \dots P_1$	V	$x_1 \dots x_n$ $\rho_1 \dots \rho_m$	$\underline{b}$
$u_{1,K} \dots u_{1,1}$	η_1	$y_{1,1} \dots y_{1,n}$ $y_{1,n+1} \dots y_{1,n+m}$	b_1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$u_{m,K} \dots u_{m,1}$	η_m	$y_{m,1} \dots y_{m,n}$ $y_{m,n+1} \dots y_{m,n+m}$	b_m
	P_1	$R_{1,1} \dots R_{1,n}$ $R_{1,n+1} \dots R_{1,n+m}$	a_1
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	P_K	$R_{K,1} \dots R_{K,n}$ $R_{K,n+1} \dots R_{K,n+m}$	a_K

Keterangan :

P_k = Tingkat prioritas ke-k $\quad k = 1, 2, \dots, K$.

V = Variabel permasalahan yang terdiri atas variabel keputusan dan variabel deviasi. Disebelah kanan V adalah seperangkat variabel-variabel nonbasis dan di bawah V adalah variabel-variabel basis.

$\underline{b}$ = vektor dengan elemen-elemen $(b_1, \dots, b_m)$ yang merupakan tetapan ruas kanan.

$y_{i,s}$ = Unsur dari baris ke-i dan kolom ke-s.

Pada tabel awal $y_{i,s}$ merupakan koefisien dari variabel nonbasis ke-s pada sasaran ke-i dengan s = 1, 2, ... ,n+m dan i = 1, 2, ... ,m dimana m adalah banyaknya sasaran dan n adalah banyaknya variabel keputusan.

$w_{k,s}$ = Faktor pembobot pada prioritas ke-k yang berkaitan dengan variabel nonbasis ke-i.

$u_{i,k}$ = Faktor pembobot pada prioritas ke-k yang berkaitan dengan variabel basis ke-i.

$R_{k,s}$ = Bilangan indikasi untuk prioritas ke-k di bawah variabel nonbasis ke-s.

a_k = Tingkat pencapaian dari prioritas ke-k.

Semua elemen-elemen dalam tabel awal tersebut dapat diperoleh secara langsung dari bentuk umum pemodelan matematika, kecuali $R_{k,s}$ dan a_k yang dapat dihitung dengan cara sebagai berikut :

$$R_{k,s} = u_k^T . y_s - w_{k,s} \quad \text{atau} \tag{2.1}$$

$$R_{k,s} = \sum_{i=1}^{m} (y_{i,s} . u_{i,k}) - w_{k,s}$$

dan

$$a_k = u_k^T . \underline{b} \quad \text{atau} \tag{2.2}$$

$$a_k = \sum_{i=1}^{m} (b_i . u_{i,k})$$

Contoh :

Menentukan tabel awal MS dari model sebagai berikut :

Tentukan $\underline{X}$ sehingga :

meminimalkan : $a = \{ (\rho_1 + \rho_2) , (\eta_3 + 2\eta_4) , \eta_1 \}$

dan memenuhi

$$G_1 : x_1 + \eta_1 - \rho_1 = 20$$

$$G_2 : x_2 + \eta_2 - \rho_2 = 35$$

$$G_3 : 5x_1 + 3x_2 + \eta_3 - \rho_3 = 220$$

$$G_4 : x_1 + x_2 + \eta_4 - \rho_4 = 60$$

Tabel awal

			P_3	0	0	0	0	0	0	
			P_2	0	0	0	0	0	0	
			P_1	0	0	1	1	0	0	
P_3	P_2	P_1	V	x_1	x_2	ρ_1	ρ_2	ρ_3	ρ_4	b
1	0	0	η_1	1	0	−1	0	0	0	20
0	0	0	η_2	0	1	0	−1	0	0	35
0	1	0	η_3	5	3	0	0	−1	0	220
0	2	0	η_4	1	1	0	0	0	−1	60
			P_1	0	0	−1	−1	0	0	0
			P_2	7	5	0	0	−1	−2	340
			P_3	1	0	−1	0	0	0	20

$$R_{1,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} - 0 = 0$$

$$R_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} - 0 = 0$$

$$R_{1,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - 1 = -1$$

$$R_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} - 0 = 7$$

$$a_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 20 \\ 35 \\ 220 \\ 60 \end{bmatrix} = 0$$

$$a_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 20 \\ 35 \\ 220 \\ 60 \end{bmatrix} = 340$$

Penjelasan tabel awal :

1. Solusi awal adalah

$$\left.\begin{aligned} \eta_1 &= 20 \\ \eta_2 &= 35 \\ \eta_3 &= 220 \\ \eta_4 &= 60 \end{aligned}\right\} \text{variabel-variabel basis}$$

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 0 \\ x_2 &= 0 \\ \rho_1 &= 0 \\ \rho_2 &= 0 \\ \rho_3 &= 0 \\ \rho_4 &= 0 \end{aligned}\right\} \text{variabel-variabel nonbasis}$$

2. Vektor hasil : $a = (0, 340, 20)$

Jadi hanya pada prioritas 1 dicapai sempurna.

3. Solusi sekarang, melalui pemeriksaan pada elemen-elemen $R_{k,s}$, terlihat belum optimal. Algorithma berikut akan menjelaskan kriteria penentuan optimalitas ini.

Algorithma Multiphase Simplex

Langkah 1. Menyusun tabel awal multiphase, mulai dengan k=1.

Langkah 2. *Cek optimalitas.* Memeriksa setiap elemen baris indikator yang bernilai positif ($R_{k,s}$) dalam baris indikator k. Seleksi $R_{k,s}$ yang positif terbesar dengan tidak adanya indikator yang berharga negatif pada prioritas yang lebih tinggi pada kolom yang sama. Tandai kolom ini dengan s'. Bila ada beberapa kolom yang memenuhi, pemilihan kolom s' dapat ditentukan sebarang. Jika tidak ada $R_{k,s}$ yang demikian pada baris ke-k, lanjutkan ke langkah 6, jika ada , ke langkah 3.

Langkah 3. *Menentukan variabel yang masuk basis.*
Variabel nonbasis yang berhubungan dengan kolom s' masuk menjadi basis.

Langkah 4. *Menentukan variabel yang keluar dari basis.*
Pilih baris i' sedemikian hingga :

$$\frac{b_{i'}}{y_{i',s'}} = \min \left\{ \frac{b_i}{y_{i,s'}} \text{, dimana } \frac{b_i}{y_{i,s'}} \geq 0 \right\}.$$

maka variabel basis yang berkaitan dengan baris i' adalah variabel yang keluar dari basis. Bila terdapat lebih dari satu, pilih variabel basis yang mempunyai prioritas lebih tinggi.

Langkah 5. *Menyusun tabel baru.*

a. Menukar posisi untuk variabel pada baris i' dengan variabel pada kolom s'.

b. Baris i' pada tabel baru (kecuali $y_{i',s'}$) dihitung dengan membagi baris i' dari tabel sebelumnya dengan $y_{i',s'}$.

c. Kolom s' pada tabel baru (kecuali $y_{i',s'}$) dihitung dengan membagi kolom s' dari tabel sebelumnya dengan negatif dari $y_{i',s'}$, yaitu $-y_{i',s'}$.

d. Posisi elemen baru $y_{i',s'}$ diganti dengan kebalikan dari $y_{i',s'}$, yaitu $\frac{1}{y_{i',s'}}$ (dari tabel sebelumnya).

Elemen-elemen lainnya dihitung dengan diberi tanda diatasnya (misalkan $\hat{b}_i$, $\hat{y}_{i,s}$ dst.) yang menyatakan himpunan dari elemen baru, sementara yang tanpa tanda diatasnya menunjukkan harga elemen-elemen dari tabel sebelumnya.

Kemudian, untuk elemen-elemen yang tidak dalam baris i' atau kolom s' dihitung dengan :

$$\hat{b}_i = b_i - \frac{(b_{i'}).(y_{i,s'})}{y_{i',s'}} \tag{2.3}$$

$$\hat{y}_{i,s} = y_{i,s} - \frac{(y_{i',s}).(y_{i,s'})}{y_{i',s'}} \tag{2.4}$$

$$\hat{R}_{k,s} = R_{k,s} - \frac{(y_{i',s}).(R_{k,s'})}{y_{i',s'}} \tag{2.5}$$

$$\hat{a}_{k} = a_{k} - \frac{(b_{i'}).(R_{k,s'})}{y_{i',s'}} \tag{2.6}$$

e. Kembali ke langkah 2.

Langkah 6. *Tes konvergensi.* Cek setiap vektor kolom pada elemen-elemen indikator (R_s) dari tabel terakhir. Bila paling sedikit terdapat satu vektor kolom yang nol semua, maka solusi masih bisa diperbaiki. Kita ke langkah 7. Jika tidak demikian, maka solusi optimal tercapai dan berhenti.

Langkah 7. *Mengkaji tingkat prioritas yang lebih rendah.* Rubah k = k+1. Jika k>K solusi optimal dipenuhi dan berhenti. Jika $k \le K$, hitung baris indikator ke-k untuk P_k dengan rumus (2.1) dan (2.2). Kemudian ke langkah 2.

Contoh 2.2 :

Tentukan $\underline{X}$ sehingga meminimalkan : $a = \{ (\rho_1+\rho_2), \eta_3, \rho_4 \}$.

dan memenuhi

$$\begin{aligned} G_1 &: 2x_1 + x_2 + \eta_1 - \rho_1 = 12 \\ G_2 &: x_1 + x_2 + \eta_2 - \rho_2 = 10 \\ G_3 &: x_1 + + \eta_3 - \rho_3 = 7 \\ G_4 &: x_1 + 4x_2 + \eta_4 - \rho_4 = 4 \\ &\underline{X}, \underline{\eta}, \underline{\rho} \ge 0 \end{aligned}$$

Penyelesaian :

P_3	P_2	P_1	V	x_1	x_2	ρ_1	ρ_2	ρ_3	ρ_4	b
			P_3	0	0	0	0	0	1	
			P_2	0	0	0	0	0	0	
			P_1	0	0	1	1	0	0	
0	0	0	η_1	2	1	−1	0	0	0	12
0	0	0	η_2	1	1	0	−1	0	0	10
0	1	0	η_3	1	0	0	0	−1	0	7
0	0	0	η_4	1	4	0	0	0	−1	4
			P_1	0	0	−1	−1	0	0	0

Tabel 2.2.1 (Tabel Awal)

Penerapan Algorithma :

Langkah 1. Membuat tabel awal seperti pada tabel 2.2.1. Menentukan k=1.

Langkah 2. Karena tidak adanya elemen positif pada baris indikator, ke langkah 6.

Langkah 6. Karena paling sedikit satu vektor kolom dalam baris indikator terdapat nilai nol, ke langkah 7.

Langkah 7. k=k+1=2, karena k<K (yaitu 2≤3) dihitung baris indikator untuk prioritas ke−2. Untuk bentuk

tabel yang baru ditunjukkan dengan tabel 2.2.2. Kemudian ke langkah 2.

			P_3	0	0	0	0	0	1	
			P_2	0	0	0	0	0	0	
			P_1	0	0	1	1	0	0	
P_3	P_2	P_1	V	$\boxed{x_1}$	x_2	ρ_1	ρ_2	ρ_3	ρ_4	b
0	0	0	η_1	2	1	−1	0	0	0	12
0	0	0	η_2	1	1	0	−1	0	0	10
0	1	0	η_3	1	0	0	0	−1	0	7
0	0	0	η_4	1	4	0	0	0	−1	4
			P_1	0	0	−1	−1	0	0	0
			P_2	$\boxed{1}$	0	0	0	−1	0	7

Tabel 2.2.2 Penambahan baris indikator ke 2.

Langkah 2. Harga positif terbesar $R_{2,s}$ tanpa satupun harga negatif diatasnya adalah yang berhubungan dengan kolom 1, sehingga s′= 1.

Langkah 3. Karena s′= 1, x_1 adalah variabel yang masuk.

Langkah 4. Menghitung seluruh perbandingan $\frac{b_i}{y_{i,s'}}$ yang tidak negatif, didapat :

$$\frac{b_1}{y_{1,1}} = \frac{12}{2} = 6$$

$$\frac{b_2}{y_{2,1}} = \frac{10}{1} = 10$$

$$\frac{b_3}{y_{3,1}} = \frac{7}{1} = 7$$

$$\frac{b_4}{y_{4,1}} = \frac{4}{1} = 4 \qquad \text{(harga paling minimum)}$$

Baris ke-4 mempunyai harga tidak negatif terkecil, sehingga i'= 4.

Akibatnya, η_4 adalah variabel yang keluar dari basis.

Langkah 5. a. Tabel baru dengan x_1 dan η_4 saling ditukarkan.

			P_3	0	0	0	0	0	1	
			P_2	0	0	0	0	0	0	
			P_1	0	0	1	1	0	0	
P_3	P_2	P_1	V	$\boxed{\eta_4}$	x_2	ρ_1	ρ_2	ρ_3	ρ_4	b
0	0	0	η_1							
0	0	0	η_2							
0	1	0	η_3							
0	0	0	$\boxed{x_1}$							
			P_1							
			P_2							

Tabel 2.2.3 x_1 masuk dan η_4 keluar dari basis.

b. Baris i'=4 pada tabel baru (kecuali $y_{i',s'}$) diperoleh dengan membagi baris i'=4 dari tabel 2.2.2 dengan $y_{i',s'} = y_{4,1} \leq 1$.

c. Kolom s'=1 pada tabel baru (kecuali $y_{i',s'}$) diperoleh dengan membagi kolom s'=1 dari tabel 2.2.2 dengan $-y_{4,1} = -1$.

d. Elemen baru pada $y_{4,1}$ adalah kebalikan dari elemen $y_{4,1}$ dari tabel sebelumnya, sehingga $y_{4,1} = 1/1 = 1$. Elemen-elemen yang tersisa dihitung dengan rumus (2.3) sampai (2.6) menghasilkan tabel 2.2.4.

			P_3	0	0	0	0	0	1	
			P_2	0	0	0	0	0	0	
			P_1	0	0	1	1	0	0	
P_3	P_2	P_1	V	η_4	x_2	ρ_1	ρ_2	ρ_3	$\boxed{\rho_4}$	b
0	0	0	$\boxed{\eta_1}$	−2	−7	−1	0	0	2	4
0	0	0	η_2	−1	−3	0	−1	0	1	6
0	1	0	η_3	−1	−4	0	0	−1	1	3
0	0	0	x_1	1	4	0	0	0	−1	4
			P_1	0	0	−1	−1	0	0	0
			P_2	−1	−4	0	0	−1	$\boxed{1}$	3

Tabel 2.2.4 Tabel baru x_1 masuk basis.

e. Kembali ke langkah 2.

Langkah 2. Harga $R_{2,s}$ positif terbesar tanpa suatu harga negatif diatasnya berhubungan dengan kolom 6 (di bawah ρ_4) sehingga s′= 6.

Langkah 3. Karena s′=6, variabel yang masuk adalah ρ_4.

Langkah 4. Menghitung seluruh perbandingan $\frac{b_i}{y_{i,s'}}$ yang tidak negatif. Didapat yang paling minimal adalah yang berhubungan dengan baris 1 (yaitu 4/2), sehingga i′=1, akibatnya η_1 kaluar dari basis.

Langkah 5. Didapat tabel baru, (lihat tabel 2.2.5). Ke langkah 2.

			P_3	0	0	0	0	0	0	
			P_2	0	0	0	0	0	0	
			P_1	0	0	1	1	0	0	
P_3	P_2	P_1	V	η_4	x_2	ρ_1	ρ_2	ρ_3	η_1	b
1	0	0	ρ_4	−1	−7/2	−1/2	0	0	1/2	2
0	0	0	η_2	0	1/2	1/2	−1	0	−1/2	4
0	1	0	η_3	0	−1/2	1/2	0	−1	−1/2	1
0	0	0	x_1	0	1/2	−1/2	0	0	1/2	6
			P_1	0	0	−1	−1	0	0	0
			P_2	0	−1/2	1/2	0	−1	−1/2	1

Tabel 2.2.5 Tabel baru setelah ρ_4 masuk basis.

Langkah 2. Karena tidak ada elemen $R_{2,s}$ yang positif, dengan elemen tidak negatif diatasnya, kita ke langkah 6.

Langkah 6. Karena R_1 semuanya nol, ke langkah 7.

Langkah 7. k=k+1 =2+1 =3. Kita susun baris indikator baru untuk prioritas ke-3.(Lihat tabel 2.2.6).

			P_3	0	0	0	0	0	0	
			P_2	0	0	0	0	0	0	
			P_1	0	0	1	1	0	0	
P_3	P_2	P_1	V	η_4	x_2	ρ_1	ρ_2	ρ_3	η_1	b
1	0	0	ρ_4	−1	−7/2	−1/2	0	0	1/2	2
0	0	0	η_2	0	1/2	1/2	−1	0	−1/2	4
0	1	0	η_3	0	−1/2	1/2	0	−1	−1/2	1
0	0	0	x_1	0	1/2	−1/2	0	0	1/2	6
			P_1	0	0	−1	−1	0	0	0
			P_2	0	−1/2	1/2	0	−1	−1/2	1
			P_3	−1	−7/2	−1/2	0	0	1/2	2

Tabel 2.2.6 Penambahan baris indikator ke 3.

Selanjutnya ke langkah 2.

Langkah 2. Karena tidak adanya elemen $R_{3,s}$ yang positif dengan elemen yang tidak negatif pada prioritas diatasnya, kita ke langkah 6.

Langkah 6. Karena tidak adanya vektor kolom R_s yang semuanya nol, kita berhenti dengan solusi optimal sebagai berikut :

$x_1 = 6$	$\eta_1 = 0$	$\rho_1 = 0$
$x_2 = 0$	$\eta_2 = 4$	$\rho_2 = 0$
	$\eta_3 = 1$	$\rho_3 = 0$
	$\eta_4 = 0$	$\rho_4 = 2$

$a = (0, 1, 2)$